

Institutionen för tillämpad mekanik, Chalmers tekniska högskola

TENTAMEN I FINIT ELEMENTMETOD — MHA 021

24 AUGUSTI 2016

Lösningar

Tid och plats:	14 ⁰⁰ – 18 ⁰⁰ i M-huset
Hjälpmedel:	Ordböcker, lexikon och typgodkänd räknare.
Lärare:	Peter Möller, tel (772) 1505. Besöker sal ca. kl 15.00 samt 17.00.
Lösningar:	Anslås på kurshemsidan samt på institutionen (3 vån. i M-huset) senast 25/8.
Betygsättning:	En fullständig och korrekt lösning på en uppgift ger poäng enligt vad som anges på uppgiftslappen. Smärre fel leder till poängavdrag. Ofullständig lösning (svar på ställt problem saknas) eller omfattande fel ger inte något poäng. Maximal poäng är 20. Det krävs 8 poäng för betyg 3; 12 poäng ger betyg 4; för betyg 5 krävs 16 poäng. Observera att ovanstående är betygssättning på enbart tentamen; för godkänd examination krävs dessutom godkända inlämningsuppgifter.
Resultatlista:	Anslås senast 30/8 på samma ställe som lösningarna. Resultaten sänds till betygsexpeditionen senast 5/9 — för kursdeltagare som inte har alla inlämningsuppgifter godkända vid detta tillfälle inrapporteras betyget U (underkänd).
Granskning:	Torsdag 1/9 12–13 samt måndag 5/9 12–13 i institutionens lokaler.

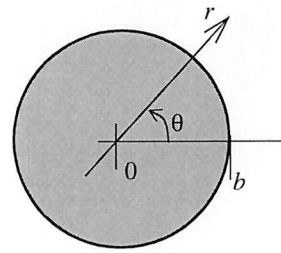
Tänk på:

- Skriv så att den som ska rätta, kan läsa och förstå hur du tänker. Den som rättar tentamen gissar inte eller antar inte vad du menar/tänker — endast vad som verkligen skrivs har betydelse vid poängsättningen.
- **Förklara/definiera införda beteckningar.**
- Rita tydliga figurer. Ange i förekommande fall vad som är positiva/negativa riktningar (på t.ex. förskjutningar och krafter).
- Gör du antaganden utöver de som anges i uppgiftstexten, så ange detta explicit och förklara dessa.

1

Betrakta ett rotationssymmetriskt värmeledningsproblem som beskrivs av randvärdesproblemet

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[k r \frac{du}{dr} \right] &= Q & 0 < r < b \\ q(b) &= \alpha(u(b) - u_0) \end{aligned} \right\}$$

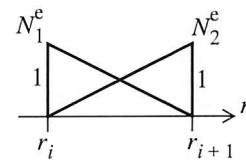


där k , Q , α och u_0 är givna konstanter, $u = u(r)$ den obekanta temperaturen, samt $q = -k \frac{du}{dr}$ värmeflödet enligt Fourier.

- a: Variations- och FE-formulera problemet, med testfunktioner enligt Galerkin. Du behöver här inte ange regularitetskrav på ingående funktioner, med det måste klart framgå hur det konvektiva randvillkoret kommer in i den svaga formen. (Observera att integrationen måste göras

över en volym: $\int_V \dots dV = \iiint \dots r dr d\theta dz$ (med lämpliga integrationsgränser)). (3p)

- b: Härled elementstyvhetsmatrisen och tag fram ett uttryck för en lumpad elementlastvektor, för ett lineärt element med längden $h = r_{i+1} - r_i$. (3p)



- c: Med $b = 8,91 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, $k = 3,5 \frac{\text{W}}{\text{m}^\circ\text{C}}$ och $Q = 63 \cdot 10^6 \frac{\text{W}}{\text{m}^3}$, så ger integrationerna i vänster- respektive högerledet av FE-formuleringen

$$K = \begin{bmatrix} 1,75 & -1,75 & 0 & 0 & 0 \\ -1,75 & 7,00 & -5,25 & 0 & 0 \\ 0 & -5,25 & 14,00 & -8,75 & 0 \\ 0 & 0 & -8,75 & 21,00 & -12,25 \\ 0 & 0 & 0 & -12,25 & 12,25 \end{bmatrix} \quad f = \begin{bmatrix} 78,15 \\ 312,59 \\ 625,18 \\ 937,77 \\ 547,03 \end{bmatrix}$$

om problemet diskretiseras med fyra lika långa lineära element. Visa — med förklaring — hur styvhetsmatrisen och lastvektorn ändras av det konvektiva randvillkoret, om $\alpha = 400 \frac{\text{W}}{\text{m}^2^\circ\text{C}}$

och $u_0 = 150^\circ\text{C}$. (1p)

- d: Med de fyra lika långa lineära elementen, $h = \frac{b}{4}$, fås nodtemperaturerna

$a = [1246 \ 1202 \ 1127 \ 1011 \ 852]^T$ °C; de fem noderna har här numrerats från $r = 0$ till $r = b$.

Använd numeriska data enligt deluppgift c ovan och beräkna värmeflödet $q(b)$ på randen, dels genom att använda randvillkoret, dels med hjälp av Fouriers lag $q = -k \frac{du}{dr}$. Vilket av de två värdena kan man förvänta sig ge bäst approximation av det exakta (analytiska) värdet? Svaret ska motiveras. (2p)

Lösning 1a: Multiplicera differentialekvationen med en testfunktion $v = v(r)$ och integrera över volymen

$$\int_0^L \int_0^b \int_0^{2\pi} v \left(Q + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[kr \frac{du}{dr} \right] \right) r d\theta dr dz = 0 \Rightarrow 2\pi L \int_0^b v \left(Qr + \frac{d}{dr} \left[kr \frac{du}{dr} \right] \right) dr = 0$$

Efter division med $2\pi L$ och partialintegration av den andra termen i integranden,

$$\int_0^b v \left(\frac{d}{dr} \left[kr \frac{du}{dr} \right] \right) dr = \left[vkr \frac{du}{dr} \right]_0^b - \int_0^b kr \frac{dv}{dr} \frac{du}{dr} dr, \text{ fås } \int_0^b kr \frac{dv}{dr} \frac{du}{dr} dr = \left[vkr \frac{du}{dr} \right]_0^b + \int_0^b vrQdr. \text{ Utveckla nu randter-}$$

men och sätt in randvillkoret: $\left[vkr \frac{du}{dr} \right]_0^b = v(b)bk \frac{du}{dr} \Big|_{r=b} - 0 = v(b)b\alpha u_0 - v(b)b\alpha u(b)$, där sista termen är obekant och behålls i vänsterledet. Vi har alltså variationsproblemet

$$\int_0^b kr \frac{dv}{dr} \frac{du}{dr} dr + \alpha b v(b) u(b) = \int_0^b vrQdr + \alpha b v(b) u_0$$

Approximera nu den obekanta funktionen med en lineärkombination av basfunktioner

$u \approx u_h = N_1 a_1 + N_2 a_2 + \dots + N_n a_n = \mathbf{N} \mathbf{a}$, där $\mathbf{N}$ är en radvektor med basfunktionerna och $\mathbf{a}$ är en kolumnvektor med nodvariablerna. Sätt in approximationen i variationsproblemet och låt

$$\frac{du_h}{dr} = \frac{d}{dr} [\mathbf{N} \mathbf{a}] = \frac{d\mathbf{N}}{dr} \mathbf{a} = \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dr} & \frac{dN_2}{dr} & \dots & \frac{dN_n}{dr} \end{bmatrix} \mathbf{a} = \mathbf{B} \mathbf{a} : \int_0^b kr \frac{dv}{dr} \mathbf{B} d\mathbf{a} + \alpha b v(b) \mathbf{N}(b) \mathbf{a} = \int_0^b vrQdr + \alpha b v(b) u_0.$$

Välj nu basfunktionerna som testfunktioner i tur och ordning (Galerkins metod); varje val ger upp-

hov till en ekvation och vis samlar ekvationerna radvis, så $v \rightarrow \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \dots \\ N_n \end{bmatrix}$ och $\frac{dv}{dr} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dr} \\ \frac{dN_2}{dr} \\ \dots \\ \frac{dN_n}{dr} \end{bmatrix} = \mathbf{B}^T$. Vi får

$$\text{alltså } \int_0^b kr \mathbf{B}^T \mathbf{B} d\mathbf{a} + \alpha b \mathbf{N}^T(b) \mathbf{N}(b) \mathbf{a} = \int_0^b \mathbf{N}^T r Q dr + \alpha b \mathbf{N}^T(b) u_0$$

Lösning 1b: Den konsistenta elementlastvektorn ges av $\mathbf{f}^e = \int_{r_i}^{r_{i+1}} (\mathbf{N}^e)^T r Q dr$, där radvektorn $\mathbf{N}^e$

innehåller de basfunktioner som antar från noll skilda värden på elementet. Eftersom summan av basfunktionerna är 1, blir lastresultanten

$$\sum_{i=1}^2 f_i^e = \int_{r_i}^{r_{i+1}} (N_1^e + N_2^e) r Q dr = Q \int_{r_i}^{r_{i+1}} r dr = Q \frac{r_2^2 - r_1^2}{2} = Q \frac{(r_2 + r_1)(r_2 - r_1)}{2} = \frac{Q(r_2 + r_1)h}{2}. \text{ En lumpad}$$

lastvektor fås om lasten fördelas lika på de två noderna: $f^e \approx \frac{Q(r_2 + r_1)h}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Elementstyvhetismatrisen ur integralen i FE-formuleringens vänsterled; med

$$B^e = \begin{bmatrix} \frac{dN_1^e}{dr} & \frac{dN_2^e}{dr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{h} & \frac{1}{h} \end{bmatrix} \text{ fås}$$

$$\int_{r_i}^{r_{i+1}} k r B^{eT} B^e dr a^e = k \begin{bmatrix} \frac{1}{h^2} & -\frac{1}{h^2} \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{1}{h^2} \end{bmatrix} \left(\int_{r_i}^{r_{i+1}} r dr \right) a^e = k \begin{bmatrix} \frac{1}{h^2} & -\frac{1}{h^2} \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{1}{h^2} \end{bmatrix} \frac{h(r_{i+1} + r_i)}{2} a^e = \frac{k(r_{i+1} + r_i)}{2h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} a^e$$

$$\text{där alltså } K^e = \frac{k(r_{i+1} + r_i)}{2h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Lösning 1c: Om vi numrerar noderna från vänster ($r = 0$) till höger ($r = b$) är alla basfunktioner utom den sista 0 vid $r = b$, så $N(b) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Bidraget till lastvektorn blir då (se lösning 1a)

$$\alpha b \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 534,6 \end{bmatrix} \text{ och styvhetsmatrisen får bidraget}$$

$$\alpha b N^T(b) N(b) = \alpha b \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3,564 \end{bmatrix}$$

Lösning 1d: Från randvillkoret fås $q(b) = \alpha(a(5) - u_0) = 280,8 \cdot 10^3 \text{ (W/m}^2\text{)}$ medan Fouriers lag

$$\text{ger } q(b) = -k \frac{du_h}{dr} \Big|_{r=b} = -k \frac{a(5) - a(4)}{h} \approx 249,8 \cdot 10^3 \text{ (W/m}^2\text{)}.$$

Eftersom derivatan av den approximerade funktionen blir sämre approximerad än funktionen själv, så förväntar vi oss att värmeflödet beräknat mha randvillkoret ger noggrannast resultat.

Låt $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ vara ett område i (x, y) -planet och Γ dess rand. Potentialfunktionen $\phi = \phi(x, y)$ är lösningen till randvärdesproblemet

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(D\nabla\phi) = f & \text{i } \Omega \\ \phi = 0 & \text{på } \Gamma \end{cases}$$

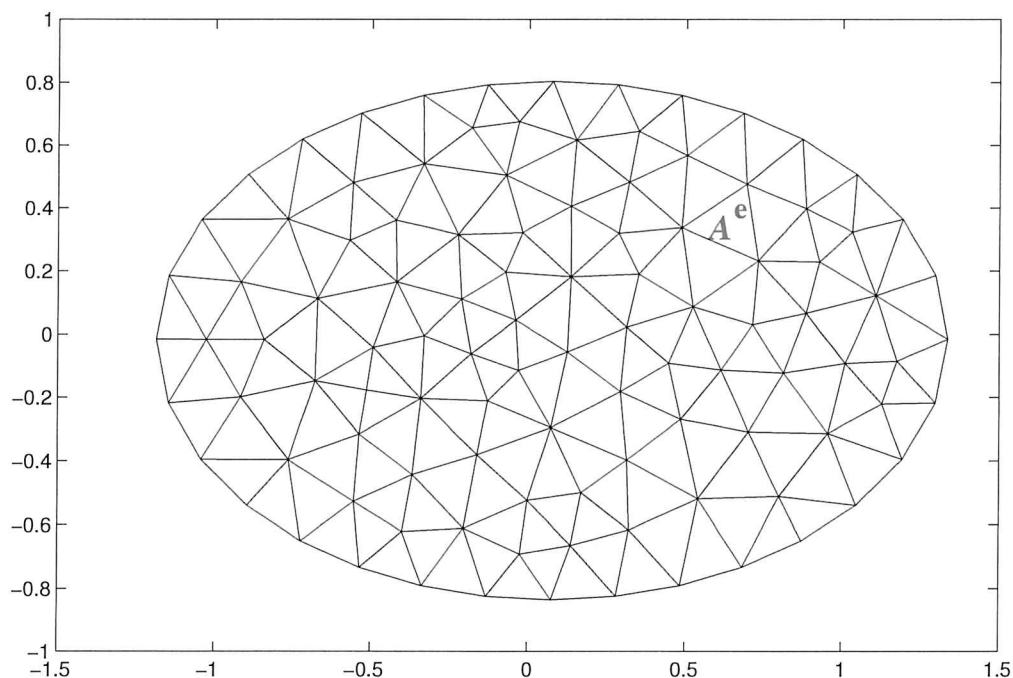
Här är $f = f(x, y)$ en given funktion och D en symmetrisk och positivt definit konstitutiv matris.

a: Använd Green–Gauss sats, $\int_{\Omega} v \operatorname{div}(\mathbf{q}) d\Omega = \oint_{\Gamma} v \mathbf{q}^T \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Omega} (\nabla v)^T \mathbf{q} d\Omega$, för att variationsformulera

problemet; det måste framgå hur randvillkoret påverkar formuleringen. Redogör också för vilka krav som ställs på testfunktionerna (viktsfunktionerna). (2p)

b: Finit–elementformulera variationsproblemet och visa hur B^e –matrisen för ett element med 3 basfunktioner ser ut. (2p)

c: Betrakta en triangulering av området Ω och låt A^e vara arean av något tre–nods–element med lineära basfunktioner. Låt vidare f (högerledet i differentialekvationen) vara en given konstant. Ställ upp elementlastvektorn för elementet. (1p)



Lösning 2a: Multiplicera differentialekvationen med en testfunktion v och integrera över områ-

det: $-\int_{\Omega} v \operatorname{div}(D\nabla\phi) d\Omega = \int_{\Omega} v f d\Omega$. Använd nu Green–Gauss sats (identifiera vektorn $D\nabla\phi$ med $\mathbf{q}$); vi

$$\text{får: } \int_{\Omega} (\nabla v)^T D(\nabla\phi) d\Omega = \oint_{\Gamma} v (D\nabla\phi)^T \mathbf{n} d\Gamma + \int_{\Omega} v f d\Omega$$

Ingående funktioner måste vara tillräckligt reguljära för att detta uttryck ska ha någon mening — funktionerna måste vara kvadratiskt integrerbara och ha kvadratiskt integrerbara första derivator. Därtill måste testfunktionerna uppfylla $v = 0$ på Γ , eftersom integranden i randintegralen är

obekant ($\nabla\phi$ är okänd). Testfunktionen måste alltså satisfiera *homogena väsentliga* randvillkor. Låt V vara rummet av funktioner som uppfyller dessa villkor. Variationsproblemet kan då skrivas:

$$\text{Hitta } \phi \in V \text{ så att } \int_{\Omega} (\nabla v)^T D(\nabla\phi) d\Omega = \int_{\Omega} v f d\Omega \quad \forall v \in V$$

Lösning 2b: Välj N basfunktioner N_i ur V (konform metod) och låt $V_h \subset V$ vara rummet av alla funktioner som kan uttryckas som en lineärkombination av basfunktionerna. Speciellt approximerar vi $\phi \approx \phi_h = \sum_{i=1}^N N_i a_i$ och beräknar nodvariablerna a_i så att variationsproblemet satisfieras i V_h

$$(\text{Galerkins metod}). \text{ Alltså har vi: Hitta } \phi_h \in V_h \text{ så att } \int_{\Omega} (\nabla v)^T D(\nabla\phi_h) d\Omega = \int_{\Omega} v f d\Omega \quad \forall v \in V_h$$

För ett element med 3 basfunktioner, dvs ett på vilket bara 3 av de N basfunktionerna har nollskilda funktionsvärden, kan FE-approximationen skrivas $\phi_h = [N_1^e \ N_2^e \ N_3^e] [a_1^e \ a_2^e \ a_3^e]^T = N^e a^e$, så

$$\text{att } \nabla\phi_h = \nabla(N^e a^e) = (\nabla N^e) a^e = B^e a^e, \text{ där alltså } B^e = \nabla N^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^e}{\partial x} & \frac{\partial N_2^e}{\partial x} & \frac{\partial N_3^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1^e}{\partial y} & \frac{\partial N_2^e}{\partial y} & \frac{\partial N_3^e}{\partial y} \end{bmatrix}$$

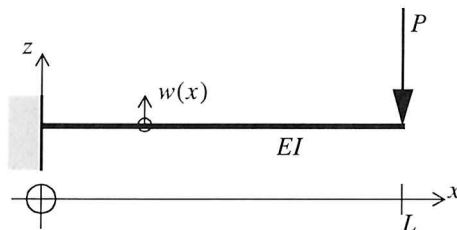
Lösning 2c: Med konstant högerled blir lastresultanten på elementet $\int_{A^e} f dA = f A^e$; denna delas

$$\text{lika på de tre noderna: } f^e = \frac{f A^e}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3

En konsolbalk med längden L och konstant böjstyvheten EI är belastad med en kraft P enligt figuren. Balkens utböjning $w(x)$ fås som lösningen till randvärdesproblemet

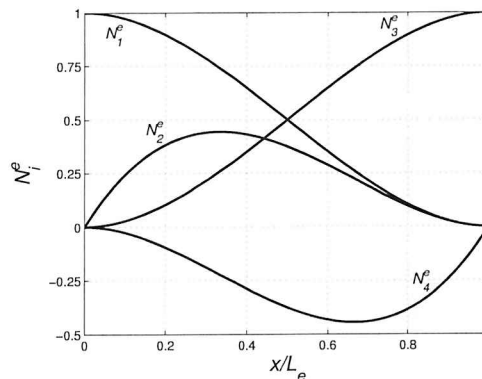
$$\begin{cases} EI \frac{d^4 w}{dx^4} = 0 \\ w(0) = 0 & \frac{dw}{dx}(0) = 0 \\ \frac{d^2 w}{dx^2}(L) = 0 & \frac{d^3 w}{dx^3}(L) = \frac{P}{EI} \end{cases}$$



- Härled den svaga formen av randvärdesproblemet. Det ska framgå hur randvillkoren påverkar variationsproblemet. Ange också krav på ingående funktioner. (2p)
- Finit-elementformulera problemet med testfunktioner enligt Galerkin och visa hur B -matrisen ser ut. (2p)

- c: Det vanligaste balkelementet har 4 kubiska basfunktioner och nodvariablerna representerar förskjutningar och rotationer i de 2 noderna. För detta element blir elementstyvhetmatrisen (med konstant böjstyvhet)

$$K^e = \frac{EI}{L_e} \begin{bmatrix} \frac{12}{L_e^2} & \frac{6}{L_e} & -\frac{12}{L_e^2} & \frac{6}{L_e} \\ \frac{6}{L_e} & 4 & -\frac{6}{L_e} & 2 \\ -\frac{12}{L_e^2} & -\frac{6}{L_e} & \frac{12}{L_e^2} & -\frac{6}{L_e} \\ \frac{6}{L_e} & 2 & -\frac{6}{L_e} & 4 \end{bmatrix}$$



där L_e är elementets längd. Lös problemet med 1 element. (2p)

Lösning 3a: Multiplicera differentialekvationen med en testfunktion $v(x)$ och integrera över

intervallet: $\int_0^L EI v \frac{d^4 w}{dx^4} dx = 0$. Två partialintegreringar ger $\int_0^L EI \frac{d^2 v}{dx^2} \frac{d^2 w}{dx^2} dx = \left[\frac{dv}{dx} EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right]_0^L - \left[v EI \frac{d^3 w}{dx^3} \right]_0^L$.

Använd nu randvillkoren för att utveckla randtermerna:

$$\left[\frac{dv}{dx} EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right]_0^L - \left[v EI \frac{d^3 w}{dx^3} \right]_0^L = \left(0 - \frac{dv}{dx} EI \frac{d^2 w}{dx^2} \Big|_{x=0} \right) - \left(P v(L) - v EI \frac{d^3 w}{dx^3} \Big|_{x=0} \right)$$

Eftersom vi inte känner värdena på $\frac{d^2 w}{dx^2}$ och $\frac{d^3 w}{dx^3}$ vid $x = 0$, begränsar vi valen av testfunktioner

till sådana som uppfyller $v(0) = 0$ och $\frac{dv}{dx}(0) = 0$ för att bli av med obekanta randtermer. Dessutom måste integralen existera, så vi måste också begränsa oss till funktioner som har kvadratisk integrerbara andra derivator. Om vi definierar

$$V = \left\{ v(x) : \int_0^L \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx < \infty, v(0) = 0, \frac{dv}{dx}(0) = 0 \right\}$$

så kan den svaga formen skrivas:

$$\text{Hitta } w \in V \text{ så att } \int_0^L EI \frac{d^2 v}{dx^2} \frac{d^2 w}{dx^2} dx = -P v(L) \quad \forall v \in V$$

Lösning 3b: Approximera w med en linearkombination av n valda basfunktioner

$$w \approx w_h = \sum_{i=1}^n N_i(x) a_i \text{ och välj testfunktionerna som basfunktionerna i tur och ordning (Galerkin)}$$

så att vi får lika många ekvationer som obekanta nodvariabler a_i . Låt V_h vara rummet av funktio-

ner som kan skrivas som en lineärkombination av basfunktionerna — FE-formuleringen kan då skrivas

$$\text{Hitta } w_h \in V_h \text{ så att } \int_0^L EI \frac{d^2 v}{dx^2} \frac{d^2 w_h}{dx^2} dx = -Pv(L) \quad \forall v \in V_h$$

Om vi sätter in $w_h = \sum_{i=1}^n N_i a_i = Na$, där $N = [N_1 \ N_2 \ \dots \ N_n]$ och $a = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]^T$, i integralen

samt samlar ekvationerna som fås för valen $v = N_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, så får vi

$$\int_0^L EIB^T B dx \ a = -P N^T(L), \text{ där } B = \frac{d^2 N}{dx^2} = \begin{bmatrix} \frac{d^2 N_1}{dx^2} & \frac{d^2 N_2}{dx^2} & \dots & \frac{d^2 N_n}{dx^2} \end{bmatrix}.$$

Lösning 3c: Eftersom vi bara har ett element så är styvhetsmatrisen samma som elementstyvhetsmatrisen, $K = K^e$, och elementlängden är L . Randvillkoren $x = 0$ gör att vi har $a_1 = a_2 = 0$ så de två första kolumnerna i K multipliceras med nollor. Vi kan inte heller använda vare sig N_1 eller N_2 som testfunktioner eftersom de inte satisfierar de två väsentliga randvillkoren vid $x = 0$;

alltså måste vi stryka de två första ekvationerna. Kvar har vi då $\begin{bmatrix} \frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ -\frac{6}{L} & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = -\frac{PL}{EI} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, med lös-

$$\text{ningen } \begin{bmatrix} a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = -\frac{L^2}{12} \begin{bmatrix} 4 & 6/L \\ 6/L & 12/L^2 \end{bmatrix} \frac{PL}{EI} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -\frac{PL^2}{EI} \begin{bmatrix} L/3 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

TENTAMEN I FINIT ELEMENTMETOD — MHA 021

9 APRIL 2016

Tid och plats:	14 ⁰⁰ – 18 ⁰⁰ , Eklandagatan 86
Hjälpmedel:	Ordböcker, lexikon och typgodkänd räknare.
Lärare:	Peter Möller, tel (772) 1505. Besöker sal ca. 15 ⁰⁰ samt 16 ³⁰ .
Lösningar:	Anslås på anslagstavlan, avdelningen för dynamik, 11/4.
Betygsättning:	En fullständig och korrekt lösning på en uppgift ger poäng enligt vad som anges på uppgiftslappen. Smärre fel leder till poängavdrag. Ofullständig lösning (svar på ställt problem saknas) eller omfattande fel ger inte något poäng. Maximal poäng är 20. Det krävs 8 poäng för betyg 3; 12 poäng ger betyg 4; för betyg 5 krävs 16 poäng. Observera att ovanstående är betygssättning på enbart tentamen; för godkänd examination krävs dessutom godkända inlämningsuppgifter.
Resultatlista:	Anslås senast 21/4 på samma ställe som lösningarna. Resultaten sänds till betygsexpeditionen senast vecka 17 — för kursdeltagare som inte har alla inlämningsuppgifter godkända vid detta tillfälle inrapporteras betyget U (underkänd).
Granskning:	fredag 22/4 12 ⁰⁰ –13 ⁰⁰ samt tisdag 26/4 10 ⁰⁰ –11 ⁰⁰ , Institutionen för tillämpad mekanik, plan 3 i Nya M-huset.

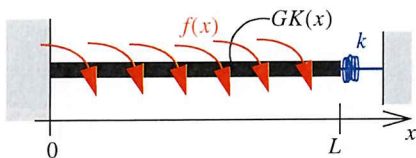
Lösningar

Tänk på:

- Skriv så att den som ska rätta kan läsa och förstå hur du tänker. Den som rättar tentamen gissar inte eller antar inte vad du menar/tänker — endast vad som verkligen skrivs har betydelse vid bedömningen av en lösning.
- **Förklara/definiera införda beteckningar.**
- Rita tydliga figurer. Ange i förekommande fall vad som är positiva/negativa riktningar (på t.ex förskjutningar och krafter).
- Gör du antaganden utöver de som anges i uppgiftstexten, så ange detta explicit och förklara dessa.

1

Betrakta en axel med längd L och vridstyvhet $GK = GK(x)$ som belastas med ett fördelat moment $f = f(x)$ (moment/längd). Om axelns högra ände stöds av en lineär torsionsfjäder med styvhet k (vid en rotation $\varphi(L)$ av axeländen ger fjädern ett mothållande vridmoment $k\varphi(L)$) och rotationsvinkeln $\varphi(x)$ mäts relativt vänster ände, ges vinkeln som lösningen till randvärdesproblemet



$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left[GK \frac{d\varphi}{dx} \right] = f & 0 < x < L \\ \varphi(0) = 0 \\ \frac{d\varphi}{dx} \Big|_{x=L} + \frac{k}{GK(L)} \varphi(L) = 0 \end{cases}$$

När $\varphi(x)$ beräknats, kan vridmomentet i axeln beräknas enligt $M_v(x) = GK \frac{d\varphi}{dx}$

a: Härled den svaga formen (variationsproblemet). (2p)

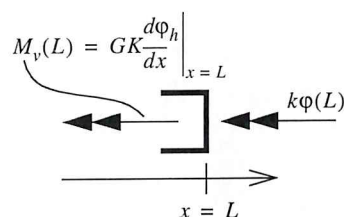
b: Finit-elementformulera problemet med testfunktioner enligt Galerkins metod. (2p)

c: Låt f och GK vara konstanta. Sätt $k = \frac{2GK}{L}$ och lös FE-problemet med två lika långa element med lineära basfunktioner. Elementstyvhetsmatrisen för ett element med längd h är

$$K^e = \frac{GK}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2p)$$

d: När FE-approximationen $\varphi_h \approx \varphi$ beräknats kan vridmomentet i torsionsfjädern beräknas antingen som $k\varphi_h(L)$ eller med

$-M_v(L) = -GK \frac{d\varphi_h}{dx}$. Vilket sätt ska vi förvänta oss ge noggrannast resultat? Motivera ditt svar. (1p)



e: Låt $e = \varphi - \varphi_h$ vara diskretiseringsfelet. Energinormen av den

exakta lösningen är $\|\varphi\|_a = fL \sqrt{\frac{L}{6GK}}$. Beräkna energinormen av diskretiseringsfelet ($\|e\|_a$). (2p)

Lösning 1a: Multiplicera differentialekvationen med en testfunktion $v(x)$ och integrera över intervallet

$$-\int_0^L v \frac{d}{dx} \left[GK \frac{d\varphi}{dx} \right] dx = \int_0^L v f dx$$

Partialintegration av vänsterledet ger

$$\int_0^L GK \frac{dv}{dx} \frac{d\varphi}{dx} dx = \int_0^L v f dx + v(L) \left[GK \frac{d\varphi}{dx} \right]_{x=L} - v(0) \left[GK \frac{d\varphi}{dx} \right]_{x=0}$$

I den första randtermen kan vi sätta in randvillkoret vid $x = L$, men $\frac{d\varphi}{dx}$ är obekant vid $x = 0$ så vi begränsar våra val av testfunktioner till de som uppfyller $v(0) = 0$. Funktionerna måste vidare vara kvadratiskt integrerbara och ha kvadratiskt integrerbar första derivata. Om vi definierar

$$V = \left\{ v: v(0) = 0 \int_0^L \left(v^2 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right) dx < \infty \right\}$$

Så kan variationsproblemet skrivas: Hitta $\varphi \in V$ så att $\int_0^L GK \frac{dv}{dx} \frac{d\varphi}{dx} dx + k v(L) \varphi(L) = \int_0^L v f dx \quad \forall v \in V$

Lösning 1b: Approximera φ med en lineärkombination av basfunktioner: $\varphi \approx \varphi_h = \sum_i N_i(x) a_i = N a$,

där $N = [N_1(x) \ N_2(x) \ \dots \ N_n(x)]$ är en radvektor med basfunktionerna och $a = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]^T$ innehåller nodvariablerna. Insättning i variationsproblemet ger

$$\left(\int_0^L GK \frac{dN}{dx} \frac{dN}{dx} dx + k N(L) N(L) \right) a - \int_0^L v f dx = 0$$

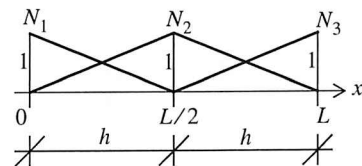
Testfunktionerna väljs nu som basfunktionerna $v = N_1, N_2, \dots, N_n$, dvs Galerkins metod, vilket ger n ekvationer som kan användas för att beräkna nodvariablerna a ; detta är ekvivalent med att sätta $v = c^T N^T$, där c är godtycklig. Insättning ger

$$c^T \left\{ \left(\int_0^L GK \left(\frac{dN}{dx} \right)^T \frac{dN}{dx} dx + k N^T(L) N(L) \right) a - \int_0^L N^T f dx \right\} = 0$$

För att denna likhet ska vara uppfylld för godtyckligt vald vektor c , så måste uttrycket innanför klammer-parentesen vara en nollvektor; med beteckningen $B = \frac{dN}{dx}$ har vi alltså

$$\left(\int_0^L GK B^T B dx + k N^T(L) N(L) \right) a = \int_0^L N^T f dx$$

Lösning 1c: Med $N = [N_1 \ N_2 \ N_3]$, $a = [a_1 \ a_2 \ a_3]^T$ och den givna elementindelningen får vi $N(L) = [0 \ 0 \ 1]$, så med $k = \frac{2GK}{L}$ har vi att



$$k N^T(L) N(L) = \frac{2GK}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vidare, med f konstant, blir

$$\int_0^L N^T f dx = f \int_0^L \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} dx = f \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot h \\ \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2h \\ \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot h \end{bmatrix} = \frac{fL}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

där vi beräknade integralerna som arean mellan respektive basfunktions graf och x -axeln. Vi har också givet att

$$\int_0^L GK B^T B dx = \frac{GK}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{GK}{h} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{GK}{L} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Vi får alltså ekvationssystemet

$$\frac{GK}{L} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \frac{fL}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Randvillkoret $\varphi(0) = 0$ innebär att vi måste sätta $a_1 = 0$ varvid 1a kolumnen i styvhetsmatrisen 'försvinner'; vidare kan vi inte använda 1a ekvationen, eftersom den har fått genom att välja testfunktion $v = N_1$ och $N_1(0) \neq 0$, dvs N_1 uppfyller inte randvillkoret vid $x = 0$ vilket vi kräver eftersom vi strukit motsvarande randterm (se uppgift 1a). Ekvationssystemet reduceras alltså till

$$\frac{GK}{L} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \frac{fL}{4} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Vi får alltså } \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \frac{fL^2}{24GK} \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Lösning 1d: Generellt gäller att felet i derivata, $\frac{d\varphi}{dx} - \frac{d\varphi_h}{dx}$, är större än felet i funktionen $\varphi - \varphi_h$

(mätt i någon norm), så $k\varphi(L)$ måste förvänta vara en bättre approximation än $-GK \frac{d\varphi_h}{dx} \Big|_{x=L}$

Lösning 1e: Låt $a(v, v) = \int_0^L GK \frac{dv}{dx} \frac{dv}{dx} dx + kv(L)v(L)$. Vi söker då $\|e\|_a = \sqrt{a(e, e)}$. Energin i felet är lika

med felet i energi: $a(e, e) = a(\varphi, \varphi) - a(\varphi_h, \varphi_h)$. Här är $a(\varphi, \varphi) = \left(fL \sqrt{\frac{L}{6GK}}\right)^2 = \frac{f^2 L^3}{6GK}$ givet; vi söker $a(\varphi_h, \varphi_h)$.

$$a(\varphi_h, \varphi_h) = \mathbf{a}^T \mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{a}^T \mathbf{f} = \frac{fL^2}{24GK} \begin{bmatrix} 0 & 5 & 4 \end{bmatrix} \frac{fL}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{7f^2 L^3}{48GK}$$

Då fås $\|e\|_a = \sqrt{a(e, e)} = \sqrt{a(\varphi, \varphi) - a(\varphi_h, \varphi_h)} = \frac{fL}{4} \sqrt{\frac{L}{3GK}}$

2

Man önskar beräkna spänningarna som uppkommer på grund av ett övertryck p i rörtvärsnitt enligt figuren. Eftersom problemet har två symmetrilinjer, nöjer man sig med att diskretisera nedre vänstra fjärdedelen av området. Elasticitetsekvationerna på svag form blir då

$$\int_A (\tilde{\nabla} v)^T D \tilde{\nabla} u dA = \int_{\Gamma_c} v^T t d\Gamma$$

Här är D en symmetrisk positivt definit konstitutiv matris, $u = [u_x \ u_y]^T$ är

de obekanta förskjutningarna, $v = [v_x \ v_y]^T$ en vektor med testfunktioner och traktionvektorn t på

Γ_c ges av $\begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -pn_x \\ -pn_y \end{bmatrix}$, där n_x och n_y är komponenterna till en utåtriktad enhetsnormalvektor på randen. Vidare ges differentialoperatoren av

$$\tilde{\nabla} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}^T$$

a: Ange randvillkoren på de båda symmetrilinjerna Γ_1 och Γ_2 , samt på de yttre begränsningslinjerna Γ_3 och Γ_4 . (2p)

b: Finit-elementformulera problemet med testfunktioner enligt Galerkin. Definiera införda beteckningar. (2p)

c: Visa hur de 3 basfunktionerna på ett element med nodkoordinaterna (x_i^e, y_i^e) kan ställas upp med den s.k C -matrismetoden (du behöver inte explicit inverta C -matrisen). (2p)

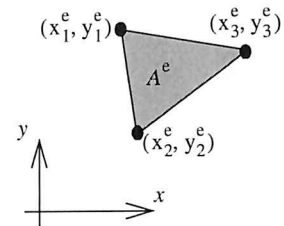
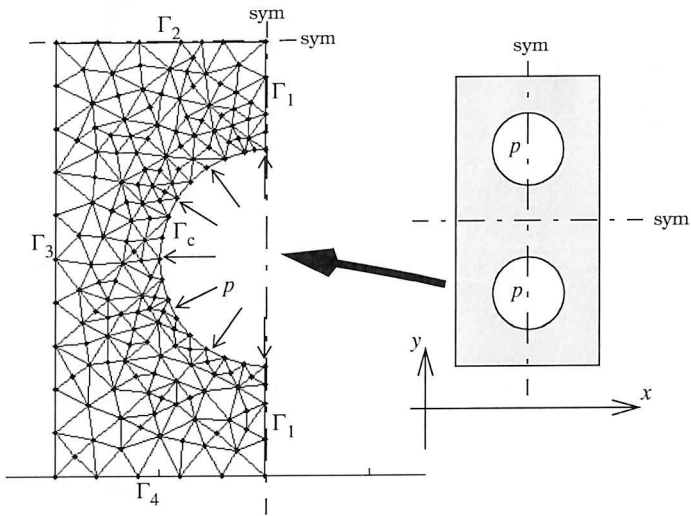
d: Basfunktioner blir

$$N_1^e = \frac{1}{2A^e} [x_2^e y_3^e - x_3^e y_2^e + (y_2^e - y_3^e)x + (x_3^e - x_2^e)y]$$

$$N_2^e = \frac{1}{2A^e} [x_3^e y_1^e - x_1^e y_3^e + (y_3^e - y_1^e)x + (x_1^e - x_3^e)y]$$

$$N_3^e = \frac{1}{2A^e} [x_1^e y_2^e - x_2^e y_1^e + (y_1^e - y_2^e)x + (x_2^e - x_1^e)y]$$

där A^e är elementetarean. Ställ upp elementets B^e -matris. (1p)



Lösning 2a: De båda yttre begränsningslinjerna, Γ_3 och Γ_4 , är fria och obelastade så normal- och tangentialspänningarna måste vara 0 på dessa. Med beteckningarna $t_x = \sigma_{xx}n_x + \sigma_{xy}n_y$ och $t_y = \sigma_{xy}n_x + \sigma_{yy}n_y$ kan detta uttryckas som $t_x = t_y = 0$.

För en symmetrirand gäller att tangentialspänningen och förskjutningen ortogonalt mot randen är 0.

$$\text{Sammanfattningsvis: } \begin{cases} u_x = 0, t_y = 0 & \text{på } \Gamma_1 \\ t_x = 0, u_y = 0 & \text{på } \Gamma_2 \\ t_x = 0, t_y = 0 & \text{på } (\Gamma_3 \cup \Gamma_4) \end{cases}$$

Lösning 2b: Approximera de obekanta förskjutningarna, $u_x \approx u_{xh} = \sum_i a_{ix} N_i$ och $u_y \approx u_{yh} = \sum_i a_{iy} N_i$, där a_{ix} och a_{iy} är obekanta nodvariabler, medan $N_i = N_i(x, y)$ är valda basfunktioner. Om vi definierar

$$N = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & \dots & N_n & 0 \\ 0 & N_1 & \dots & 0 & N_n \end{bmatrix} \quad a = [a_{1x} \ a_{1y} \ \dots \ a_{nx} \ a_{ny}]^T$$

kan vi skriva $u \approx u_h = Na$. Vidare ska testfunktionerna enligt Galerkin vara en godtycklig lineärkombination av basfunktionerna (alternativt: väljs i tur och ordning som

$$v = \begin{bmatrix} N_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ N_1 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} N_n \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ N_n \end{bmatrix}; \text{ låt } c = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_{2n-1} \ c_{2n}]^T \text{ vara en kolumnvektor med } 2n \text{ godtyckligt}$$

valda koefficienter. Vi har då $v = Nc$. Insättning i den svaga formen ger nu

$$\int_A (\tilde{V}Nc)^T D \tilde{V}(Na) dA - \int_{\Gamma_c} (Nc)^T t d\Gamma = c^T \left[\int_A (\tilde{V}N)^T D \tilde{V}N dA a - \int_{\Gamma_c} N^T t d\Gamma \right] = 0$$

Eftersom c är en godtycklig vektor måste uttrycket inom parentes vara en nollvektor, så med

$$B = \tilde{V}N \text{ fås alltså } \int_A B^T D B dA a = \int_{\Gamma_c} N^T t d\Gamma \text{ eller } Ka = f.$$

Lösning 2c: Ansatsen på elementet är $u_{xh} = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y = \bar{N} \alpha$ (pss för u_{yh}), med $\bar{N} = [1 \ x \ y]$ och

$$\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3]^T. \text{ Vi vill skriva detta som } u_{xh} = \sum_{i=1}^3 N_i^e a_i^e = N^e a^e, \text{ där } a^e = [a_1^e \ a_2^e \ a_3^e]^T \text{ är nodvariab-}$$

lerna (för x - eller y -förskjutningen) på elementet och $N^e = [N_1^e \ N_2^e \ N_3^e]$ är elementets basfunktio-

ner; basfunktionerna ska konstrueras så att $N_i^e(x_j^e, y_j^e) = \begin{cases} 1 & \text{om } j = i \\ 0 & \text{om } j \neq i \end{cases} (j = 1, 2, 3)$. Vi tecknar nu

$u_{xh}(x_i^e, y_i^e) = \bar{N}(x_i^e, y_i^e) \alpha = N^e(x_i^e, y_i^e) a^e$ i de tre punkterna:

$$\begin{bmatrix} u_{xh}(x_1^e, y_1^e) \\ u_{xh}(x_2^e, y_2^e) \\ u_{xh}(x_3^e, y_3^e) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1^e & y_1^e \\ 1 & x_2^e & y_2^e \\ 1 & x_3^e & y_3^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^e \\ a_2^e \\ a_3^e \end{bmatrix}$$

Med $C = \begin{bmatrix} 1 & x_1^e & y_1^e \\ 1 & x_2^e & y_2^e \\ 1 & x_3^e & y_3^e \end{bmatrix}$ har vi då $C\tilde{\alpha} = a^e$, så $\tilde{\alpha} = C^{-1}a^e$ (C är inverterbar om de tre punkterna (noderna)

inte ligger på en rät linje). Vi får då $u_{xh} = \tilde{N}\tilde{\alpha} = \tilde{N}C^{-1}a^e = N^e a^e$, så $N^e = \tilde{N}C^{-1}$

Lösning 2d: På elementet har vi de från noll skiljda basfunktionerna $N^e = \begin{bmatrix} N_1^e & 0 & N_2^e & 0 & N_3^e & 0 \\ 0 & N_1^e & 0 & N_2^e & 0 & N_3^e \end{bmatrix}$

Elementets bidrag till B -matrisen blir då

$$B^e = \tilde{\nabla} N^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1^e & 0 & N_2^e & 0 & N_3^e & 0 \\ 0 & N_1^e & 0 & N_2^e & 0 & N_3^e \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^e}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2^e}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3^e}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1^e}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2^e}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3^e}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1^e}{\partial y} & \frac{\partial N_1^e}{\partial x} & \frac{\partial N_2^e}{\partial y} & \frac{\partial N_2^e}{\partial x} & \frac{\partial N_3^e}{\partial y} & \frac{\partial N_3^e}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (y_2^e - y_3^e) & 0 & (y_3^e - y_1^e) & 0 & (y_1^e - y_2^e) & 0 \\ 0 & (x_3^e - x_2^e) & 0 & (x_1^e - x_3^e) & 0 & (x_2^e - x_1^e) \\ (x_3^e - x_2^e) & (y_2^e - y_3^e) & (x_1^e - x_3^e) & (y_3^e - y_1^e) & (x_2^e - x_1^e) & (y_1^e - y_2^e) \end{bmatrix}$$

3

Betrakta numerisk integration av en funktion f enligt $\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \approx \sum_{i=1}^n H_i f(\xi_i)$; här är n antalet integrationspunkter, ξ_i ($i = 1, \dots, n$) punkternas koordinater H_i motsvarande integrationsvikter. Om vi konstruerar n lagrangepolynom av grad $n-1$ så att

$$l_i^{n-1}(\xi_j) = \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases}$$

så ges integrationsvikterna av $H_i = \int_{-1}^1 l_i^{n-1}(\xi) d\xi$.

a: Med 3 punkters gaussintegration är integrationspunkterna $\xi_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$, $\xi_2 = 0$ och $\xi_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}$.

Beräkna integrationsvikterna H_1 , H_2 och H_3 . **Ledning:** av symmetriskäl måste vi ha $H_1 = H_3$ (2p)

b: Ett Serendipity element har 8 basfunktioner på formen

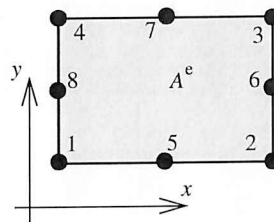
$$N_i^e(x, y) = \alpha_{i1} + \alpha_{i2}x + \alpha_{i3}y + \alpha_{i4}x^2 + \alpha_{i5}xy + \alpha_{i6}y^2 + \alpha_{i7}x^2y + \alpha_{i8}xy^2$$

om elementsidorna är parallella med koordinataxlarna. Då elementet används för att approximera lösningen till ett problem som beskrivs av Poissons ekvation, ges elementstyvhetsmatrisen av

$$K^e = \int_{A^e} k \mathbf{B}^{eT} \mathbf{B}^e dA \quad \text{där } k > 0 \text{ är en konstant och } \mathbf{B}^e = \nabla N^e; \text{ här är}$$

$$\nabla = \left[\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \right]^T \text{ gradientoperatoren och } N^e = [N_1^e \dots N_8^e] \text{ en radvektor med de 8 basfunktionerna.}$$

Hur många integrationspunkter behövs för att integrera fram K^e exakt med gaussintegration?
Av lösningen måste framgå hur du kom fram till ett svar. (2p)



Lösning 3a: Med $n = 3$ har vi tre stycken lagrangepolynom av grad $n - 1 = 2$. Det andra av dessa

$$\text{är } l_2^2(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_3)}{(\xi_2 - \xi_1)(\xi_2 - \xi_3)} = 1 - \frac{5\xi^2}{3} \text{ och alltså } H_2 = \int_{-1}^1 \left(1 - \frac{5\xi^2}{3}\right) d\xi = \frac{8}{9}$$

Eftersom summan av de tre lagrangepolynomen är $\equiv 1$ har vi att $H_1 + H_2 + H_3 = 2$, så med

$$H_1 = H_3 \text{ fås } H_1 = \frac{1}{2}(2 - H_2) = \frac{5}{9}$$

Lösning 3b: Vi har här $\nabla N_i = \begin{bmatrix} \alpha_{i2} + 2\alpha_{i4}x + \alpha_{i5}y + 2\alpha_{i7}xy + \alpha_{i8}y^2 \\ \alpha_{i3} + \alpha_{i5}x + 2\alpha_{i6}y + \alpha_{i7}x^2 + 2\alpha_{i8}xy \end{bmatrix}$, så matriselementen i $\mathbf{B}^e$ innehåller

termer som är kvadratiske i x och i y . Integranden $\mathbf{B}^{eT} \mathbf{B}^e$ innehåller då x^4 - och y^4 -termer, så vi måste integrera 4e-gradspolynom. Med n gausspunkter integreras polynom av upp till grad $2n - 1$ exakt. Vi har då $2n - 1 = 4$. Det krävs alltså 3 integrationspunkter (i var riktning) för att integrera fram elementstyvhetsmatrisen exakt.

Institutionen för tillämpad mekanik, Chalmers

TENTAMEN I FINIT ELEMENTMETOD — MHA 021

11 JANUARI 2016

Lösningar

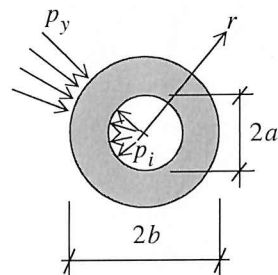
Tid och plats:	14 ⁰⁰ – 18 ⁰⁰ i M-huset
Hjälpmedel:	Ordböcker, lexikon och typgodkänd räknare.
Lärare:	Peter Möller, tel (772) 1505. Besöker sal ca. 15 ⁰⁰ samt 16 ³⁰ .
Lösningar:	Anslås på anslagstavlan, avdelningen för dynamik, 12/1; se även kurshemsidan.
Betygsättning:	En fullständig och korrekt lösning på en uppgift ger poäng enligt vad som anges på uppgiftslappen. Smärre fel leder till poängavdrag. Ofullständig lösning (svar på ställt problem saknas) eller omfattande fel ger inte något poäng. Maximal poäng är 20. Det krävs 8 poäng för betyg 3; 12 poäng ger betyg 4; för betyg 5 krävs 16 poäng. Observera att ovanstående är betygssättning på enbart tentamen; för godkänd examination krävs dessutom godkända inlämningsuppgifter.
Resultatlista:	Anslås senast 25/1 på samma ställe som lösningarna. Resultaten sänds till betygsexpeditionen senast 29/1 — för kursdeltagare som inte har alla inlämningsuppgifter godkända vid detta tillfälle inrapporteras betyget U (underkänd).
Granskning:	tisdag 26/1 12–14 samt onsdag 27/1 12–13, Institutionen för tillämpad mekanik, plan 3 i Nya M-huset.

Tänk på:

- Skriv så att den som ska rätta kan läsa och förstå hur du tänker. Den som rättar tentamen gissar inte eller antar inte vad du menar/tänker — endast vad som verkligen skrivs har betydelse vid bedömningen av en lösning.
- **Förklara/definiera införda beteckningar.**
- Rita tydliga figurer. Ange i förekommande fall vad som är positiva/negativa riktningar (på t.ex förskjutningar och krafter).
- Gör du antaganden utöver de som anges i uppgiftstexten, så ange detta explicit och förklara dessa.

1

Betrakta ett tjockväggigt rör med radien b och hålets radie a . Om röret är belastat med ett inre tryck p_i och ett yttre tryck p_y , och om plant spänningstillstånd antas, så kan den radiella förskjutningen u beräknas genom att lösa randvärdesproblemet



$$\begin{cases} -\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}[ru]\right] = 0 \\ \left.\frac{du}{dr}\right|_{r=a} = -\left(\frac{p_i(1-\nu^2)}{E} + \nu\frac{u(a)}{a}\right) \\ \left.\frac{du}{dr}\right|_{r=b} = -\left(\frac{p_y(1-\nu^2)}{E} + \nu\frac{u(b)}{b}\right) \end{cases}$$

där E och ν är materialets elasticitetsmodul respektive tvärkontraktionstal.

- a: Inför testfunktionen (viktsfunktionen) $v = v(r)$ och härled den svaga formen av randvärdesproblemet (variationsproblemet); du behöver inte ange regularitetskrav på funktionerna. Observera att integrationen bör göras över en volym:

$$\int_0^L \int_0^{2\pi} \int_a^b \dots r d\theta dr dz = 2\pi L \int_a^b \dots r dr$$

där L är rörets längd och θ en vinkelkoordinat i det visade snittet. (2p)

- b: FE-formulera problemet med testfunktioner valda enligt Galerkins metod. (1p)

- c: Antag att problemet diskretiseras med 3 lika långa element, $h = \frac{b-a}{3}$, och att noderna numreras med stigande r -koordinat. Vi får då ett ekvationssystem $Ka = f$ med 4 nodvariabler i vektorn a . Visa hur lastvektorn f ser ut samt ange bidraget till styvhetsmatrisen K från de två randvillkoren. (2p)

Lösning 1a: Multiplicera differentialekvationen med en testfunktion $v(r)$ och integrera över voly-

men: $-\int_0^L \left(\int_0^{2\pi} \int_a^b v \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} [ru] \right] r d\theta \right) dr dz = 0 \Rightarrow -2\pi L \int_a^b v \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} [ru] \right] r dr = 0$. Partialintegration ger:

$$\int_a^b (vr) \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} [ru] \right] dr = \left[v \frac{d}{dr} [ru] \right]_a^b - \int_a^b \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [rv] \frac{d}{dr} [ru] dr = 0$$

Vi måste utveckla randtermerna för att identifiera hur randvillkoren kommer in:

$$\begin{aligned} \left[v \frac{d}{dr} [ru] \right]_a^b &= \left[v \left(u + r \frac{du}{dr} \right) \right]_a^b = \left[vr \left(\frac{u}{r} + \frac{du}{dr} \right) \right]_a^b = v(b)u(b) + bv(b) \frac{du}{dr} \Big|_b - v(a)u(a) - av(a) \frac{du}{dr} \Big|_a = \\ &= v(b)u(b) - \frac{bv(b)(1-v^2)p_y}{E} - v(b)u(b) - v(a)u(a) + \frac{av(a)(1-v^2)p_i}{E} + v(a)u(a) = \\ &= \frac{1-v^2}{E} (av(a)p_i - bv(b)p_y) + (1-v)(v(b)u(b) - v(a)u(a)) \end{aligned}$$

Multiplikation med $\frac{E}{1-v^2}$ ger då

$$\frac{E}{1-v^2} \int_a^b \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [rv] \frac{d}{dr} [ru] dr - \frac{E}{1+v} (v(b)u(b) - v(a)u(a)) = av(a)p_i - bv(b)p_y$$

Lösning 1b: Approximera $u \approx u_h = Na$ där $N = [N_1(r) \ N_2(r) \ \dots \ N_n(r)]$ är valda basfunktioner och

$a = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]^T$. Testfunktionen väljs sedan enligt Galerkins metod som $v = N_1, N_2, \dots, N_n$. Vi har då

$$\frac{E}{1-v^2} \int_a^b \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [rv] \frac{d}{dr} [rN] da - \frac{E}{1+v} (v(b)N(b) - v(a)N(a))a = av(a)p_i - bv(b)p_y \quad v = N_1, N_2, \dots, N_n$$

eller med ekvationerna samlade radvis till ett ekvationssystem

$$\left[\frac{E}{1-v^2} \int_a^b \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [rN^T] \frac{d}{dr} [rN] dr - \frac{E}{1+v} (N^T(b)N(b) - N^T(a)N(a)) \right] a = aN^T(a)p_i - bN^T(b)p_y$$

Lösning 1c: Med de 4 noderna numrerade från vänster ($r = a$) mot höger ($r = b$) har vi

$N(a) = [N_1(a) \ N_2(a) \ N_3(a) \ N_4(a)] = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$ och pss $N(b) = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$. Högerledet ger nu lastvektorn

som $f = aN^T(a)p_i - bN^T(b)p_y = ap_i[1 \ 0 \ 0 \ 0]^T - bp_y[0 \ 0 \ 0 \ 1]^T = [ap_i \ 0 \ 0 \ -bp_y]^T$.

Randvillkorens bidrag till styvhetsmatrisen ges av andra och tredje termen i vänsteledet med

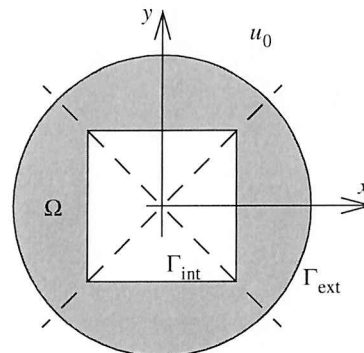
$$N^T(a)N(a) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ och } N^T(b)N(b) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ fås vi } -\frac{E}{1+v} (N^T(b)N(b) - N^T(a)N(a)) = \begin{bmatrix} \frac{E}{1+v} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{E}{1+v} \end{bmatrix}$$

2

Betrakta värmeledningsproblemet

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(k\nabla u) = 0 & \text{i } \Omega \\ u = g & \text{på } \Gamma_{\text{int}} \\ -k(\nabla u)^T \mathbf{n} = \alpha(u - u_0) & \text{på } \Gamma_{\text{ext}} \end{cases}$$

Här är u_0 , g , $k > 0$ och $\alpha > 0$ givna konstanter, medan $u = u(x, y)$ är den obekanta temperaturen. Området Ω är enligt figuren till höger; Γ_{ext} och Γ_{int} är yttre respektive inre randen till Ω , medan $\mathbf{n}$ är en normalvektor med längd 1 riktad ut från Ω .



a: Eftersom problemet är symmetriskt med avseende på fyra axlar, kan man välja att lösa randvärdesproblemet på 1/8-del av området. Formulera randvärdesproblemet så att detta blir möjligt. (1p)

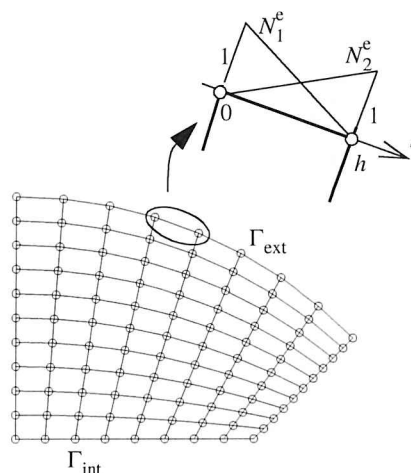
b: Variationsformulera problemet (dvs härled den svaga formen av randvärdesproblemet). (2p)

Ledning: om $\mathbf{q}$ är en vektorvärd funktion och ϕ är en skalär funktion, så kan Green–Gauss sats skrivas

$$\int_{\Omega} \phi \operatorname{div}(\mathbf{q}) d\Omega = \oint_{\Gamma} \phi \mathbf{q}^T \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Omega} (\nabla \phi)^T \mathbf{q} d\Omega$$

c: FE-formulera problemet med testfunktioner (viktsfunktioner) enligt Galerkins metod. (2p)

d: Antag att vi delar in området med lineära element och betrakta en elementsida med längd h utmed den konvektiva randen Γ_{ext} (se illustration). Inför en lokal koordinat s och beräkna elementsidans bidrag till styvhetsmatrisen och lastvektorn p.g.a det konvektiva randvillkoret. (2p)



Lösning 2a: Låt Γ_{sym} beteckna symmetriränderna; derivatan av temperaturen tvärs dessa ränder måste vara noll. Vi har då

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(k\nabla u) = 0 & \text{i } \Omega \\ u = g & \text{på } \Gamma_{\text{int}} \\ -k(\nabla u)^T \mathbf{n} = \alpha(u - u_0) & \text{på } \Gamma_{\text{ext}} \\ (\nabla u)^T \mathbf{n} = 0 & \text{på } \Gamma_{\text{sym}} \end{cases}$$

Lösning 2b: Vi multiplicerar differentialekvationen med en nästan godtycklig testfunktion

$v = v(x, y)$ och integrerar över området: $-\int_{\Omega} v \operatorname{div}(k\nabla u) d\Omega = 0$. Green–Gauss sats ger då

$$\int_{\Omega} (\nabla v)^T k(\nabla u) d\Omega = \oint_{\Gamma} v k(\nabla u)^T \mathbf{n} d\Gamma$$

Utveckla nu randintegralen: $\oint_{\Gamma} v k(\nabla u)^T \mathbf{n} d\Gamma = \int_{\Gamma_{\text{ext}}} v k(\nabla u)^T \mathbf{n} d\Gamma + \int_{\Gamma_{\text{int}}} v k(\nabla u)^T \mathbf{n} d\Gamma + \int_{\Gamma_{\text{sym}}} v k(\nabla u)^T \mathbf{n} d\Gamma$

På Γ_{int} är derivatan $(\nabla u)^T n$ obekant, så vi begränsar valet av testfunktioner till sådana att $v = 0$ på denna del av randen; på Γ_{ext} kan vi sätta in randvillkoret så att integranden blir $-v\alpha(u - u_0)$; på symmetriränderna blir integranden noll enligt symmetrivillkoret. Vi har då variationsproblemet: hitta u så att

$$\begin{cases} \int_{\Omega} (\nabla v)^T k (\nabla u) d\Omega + \int_{\Gamma_{\text{ext}}} \alpha v u d\Gamma = \int_{\Gamma_{\text{ext}}} \alpha v u_0 d\Gamma \\ u = g, v = 0 \quad \text{på } \Gamma_{\text{int}} \end{cases}$$

Lösning 2c: Inför approximationen $u \approx u_h = Na$ där $N = [N_1(x, y) \dots N_n(x, y)]$ är en radvektor med valda basfunktioner och $a = [a_1 \dots a_n]^T$ är obekanta nodvariabler. Insättning i variationsproblemet

$$\text{ger} \left(\int_{\Omega} (\nabla v)^T k B d\Omega + \int_{\Gamma_{\text{ext}}} \alpha v N d\Gamma \right) a = \int_{\Gamma_{\text{ext}}} \alpha v u_0 d\Gamma, \text{ där } B = \nabla N = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial y} \end{bmatrix}. \text{ Vi väljer sedan test funktioner}$$

enligt Galerkins metod, dvs $v = N_1, N_2, \dots, N_n$, och får då lika många ekvationer som obekanta nodvariabler; ekvationerna samlas radvis i ett ekvationssystem, varvid vi får

$$\left(\int_{\Omega} B^T k B d\Omega + \int_{\Gamma_{\text{ext}}} \alpha N^T N d\Gamma \right) a = \int_{\Gamma_{\text{ext}}} \alpha N^T u_0 d\Gamma \text{ (alternativt: låt } v \text{ vara en godtycklig lineärkombination av}$$

de valda basfunktionerna $v = c^T N^T$, där $c^T = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n]$ väljs godtyckligt), eller

$$Ka = f$$

$$\text{där } K = \int_{\Omega} B^T k B d\Omega + \int_{\Gamma_{\text{ext}}} \alpha N^T N d\Gamma \quad f = \int_{\Gamma_{\text{ext}}} \alpha N^T u_0 d\Gamma.$$

Lösning 2d: Bidraget till lastvektorn blir $f^e = \int_0^h \alpha N^{eT} u_0 ds = \alpha u_0 \int_0^h \begin{bmatrix} N_1^e \\ N_2^e \end{bmatrix} ds = \alpha u_0 \int_0^h \begin{bmatrix} \frac{h-s}{h} \\ \frac{s}{h} \end{bmatrix} ds = \frac{\alpha u_0}{2} h \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(integralerna av basfunktionerna beräknas här enklast som arean mellan s -axeln och respektive funktions graf). Bidraget till styvhetsmatrisen fås som

$$\int_0^h \alpha N^{eT} N^e d\Gamma = \frac{\alpha}{h^2} \int_0^h \begin{bmatrix} (h-s)^2 & (hs-s^2) \\ (hs-s^2) & s^2 \end{bmatrix} ds = \frac{\alpha h}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

3

Figuren visar ett 2D elasticitetsproblem vars lösning man vill approximerar med en konform finit- elementmetod. Antag att man utgår från en ganska grov diskretisering med lineära 3-nods element och använder en adaptiv h -metod för att approximerar lösningen.

a: Redogör för vad som menas med adaptivitet och förklara vad h -metod betyder. (2p)

b: I vilket eller vilka områden förväntar du dig att ett adaptivt FE-programmet ska generera de till storleken minsta elementen? Motivera svaret. (2p)

c: En konform FE-diskretisering av problemet leder till ekvationssystemet $Ka = f$, där styvhetsmatrisen K är symmetrisk och posi-

tivt definit. Visa att lösningen $a = K^{-1}f$ minimerar den potentiella energin

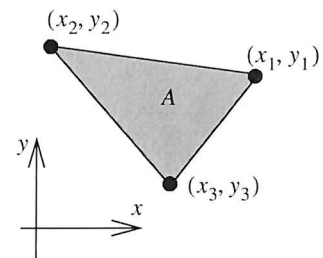
$$\Pi(v) = \frac{1}{2} v^T K v - v^T f, \text{ d v s visa att } \Pi(a) \leq \Pi(v), \text{ med } \Pi(a) = \Pi(v) \text{ endast om } v \equiv a. (2p)$$

d: Basfunktionerna för ett av de triangulära elementen ges av

$$N_1^e(x, y) = \frac{1}{2A} [x_2 y_3 - x_3 y_2 + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y]$$

$$N_2^e(x, y) = \frac{1}{2A} [x_3 y_1 - x_1 y_3 + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y]$$

$$N_3^e(x, y) = \frac{1}{2A} [x_1 y_2 - x_2 y_1 + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y]$$

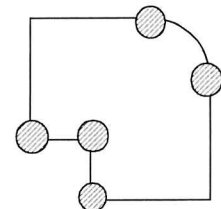


där $A = \frac{1}{2}(x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_1 y_3 - x_2 y_1 - x_3 y_2)$ är elementytan och (x_j, y_j) är koordinaten för nod j .

Visa att elementet är komplett. (2p)

Lösning 3a: Ett adaptivt FE-program uppskattar diskretiseringsfelets storlek. Om felet är större än någon angiven tolerans, ändrar programmet FE-diskretiseringen; med h -metod menas att fler (till storleken mindre) element används. Processen fortgår till dess att den önskade noggrannheten uppnåtts.

Lösning 3b: Med en adaptiv h -metod förväntar man sig de till storleken minsta elementen i områden där förstaderivatorna i lösningen varierar som mest (d.v.s i områden där andraderivator är stora). I ett elasticitetsproblem får man singulära punkter — där spänningarna (förstaderivator) ändras snabbt över korta sträckor — vid t.ex inåtvända hörn, och vid abrupta förändringar i randvillkor. I det givna problemet finns 5 sådana punkter, som visas i figuren här bredvid.



Lösning 3c: Låt a vara lösningen till ekvationssystemet $Ka = f$ så att

potentiella energin i FE-approximationen blir $\Pi(a) = \frac{1}{2} a^T K a - a^T f$. Betrakta nu en godtycklig vektor v och låt $w = v - a$. Vi har då

$$\begin{aligned}
\Pi(v) &= \Pi(w+a) = \frac{1}{2}(w+a)^T K(w+a) - (w+a)^T f = \\
&= \frac{1}{2}a^T Ka + \frac{1}{2}a^T Kw + \frac{1}{2}w^T Ka + \frac{1}{2}w^T Kw - w^T f - a^T f = \\
&= \{a^T Kw = w^T Ka \text{ ty } K \text{ är sym.}\} = \Pi(a) + \frac{1}{2}w^T Kw + w^T(Ka-f) = \\
&= \{Ka=f \text{ så } Ka-f=0\} = \Pi(a) + \frac{1}{2}w^T Kw
\end{aligned}$$

Men $w^T Kw > 0$ (för $w \neq 0$), ty K är positivt definit; alltså gäller $\Pi(v) \geq \Pi(a)$ med likhet endast då $w = 0$, d.v.s då $v = a$

Lösning 3d: Låt u_{xh} och u_{yh} beteckna de primärt obekanta i elasticitetsproblemet. Elementet är

komplett om det går att välja nodvariabelvärden a_{ix}^e (och a_{iy}^e) så att ansatsen $u_{xh} = \sum_{i=1}^3 a_{ix}^e N_i^e$ på

elementet blir en godtycklig konstant (pss för u_{yh}), samt välja värden så att gradienten ∇u_{xh} (och ∇u_{yh}) blir konstanta. Det senare villkoret är trivialt uppfyllt eftersom de lineära basfunktionerna

har konstanta gradienter: $\nabla u_{xh} = a_{1x}^e \begin{bmatrix} y_2 - y_3 \\ x_3 - x_2 \end{bmatrix} + a_{2x}^e \begin{bmatrix} y_3 - y_1 \\ x_1 - x_3 \end{bmatrix} + a_{3x}^e \begin{bmatrix} y_1 - y_2 \\ x_2 - x_1 \end{bmatrix}$ (analogt för ∇u_{yh}).

För att visa att det första villkoret är uppfyllt väljer vi nodvariablerna till en och samma godtyckliga konstant c — vi har då $u_{xh} = c(N_1^e + N_2^e + N_3^e) = \frac{c}{2A}(x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3 + x_1y_2 - x_2y_1) = \frac{c}{2A}2A = c$ (och på samma sätt ser vi att u_{yh} kan vara en godtycklig konstant).